Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Московский областной филиал

Факультет экономики и менеджмента
(наименование факультета)

Кафедра гуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин
(наименование кафедры)

Задания для самостоятельной работы студентов

Методы оптимальных решений
(индекс и наименование дисциплины, в соответствии с учебным планом)

Мет. опт. реш.
(сокращенное наименование дисциплины)

по направлению подготовки
38.03.01 Экономика
(код и наименование направления подготовки)

Экономика и управление организацией
направленность (профиль)

Бакалавр
квалификация

Заочная
форма обучения

Год набора – 2017

Красногорск, 2020 г.

Автор-составитель:

доцент, д.п.н., профессор кафедры гуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин Самсонова С.А.

(ученое звание, ученая степень, должность) (Ф.И.О.)

Заведующий кафедрой:

доцент, к. философских н., заведующий кафедрой гуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин Мирошниченко Л.Н.

(ученое звание, ученая степень, должность) (Ф.И.О.)

Задание 1.

1.1. Цель и содержание задания

Цель задания[1]: приобретение навыков решения задач линейного программирования графическим методом.

Содержание задания: Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$f = x_1 + ax_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 - x_2 \ge -b \\ cx_1 - x_2 \le 8c + 3 \end{cases}$$

Значения a,b,c выбрать в соответствии со своим вариантом (номер варианта N – последняя цифра номера зачетной книжки).

N	a	b	c	**N**	a	b	c
1	3	6	1	**6**	3	13/2	2
2	1	9	1	**7**	4	12	½
3	-1	6	1/8	**8**	5/4	9	1/3
4	5	9	1	**9**	-1	6	½
5	3/2	7	2	**10**	-1/3	10	2

1.2. Методические рекомендации для выполнения задания

Графический метод решения задач линейного программирования является основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи. Каждое из неравенств задачи линейного программирования определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость. Пересечение этих полуплоскостей задает область допустимых решений (ОДР), т.е. любая точка из этой области является решением системы ограничений. ОДР всегда представляет собой выпуклую фигуру.

Пример. Предприятие производит продукцию двух видов П1 и П2. На производство единицы продукции П1 идет 5 единиц материала, а на производство единицы П2 - 20 ед. материала. Производство П1 требует 10 человеко-часов, а П2 - 15. Всего имеется 400 ед. материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве единицы П1 – 45 руб., при производстве П2 - 80 руб.

---

[1] Цель задания соответствует результатам изучения дисциплины (знания, умения, навыки), представленным в рабочей программе

Определить объем производимой продукции, дающий максимальную прибыль, при этом должен быть израсходован весь материал.

Решение. Обозначим: X_1 - число изготовленной продукции $П_1$, X_2 – количество изготовленной продукции $П_2$. Представим данные в таблице.

Таблица 1

Параметры	**Всего**	**Продукция**	
		П1 (X_1)	**П2 (X_2)**
Количество материала/ед. продукции	400	5	20
Время чел/час	450	10	15
Прибыль от производства ед. продукции в руб.		45	80

Задача оптимизации (целевая функция) и ограничения задачи (допустимое множество X) имеют вид:

Целевая функция:

$$F(x_1,x_2) = 45\,X_1 + 80\,X_2 \rightarrow \max\,, \qquad (1)$$

Ограничения задачи:

$$\begin{aligned} 5\,X_1 + 20\,X_2 &\le 400 \\ 10\,X_1 + 15\,X_2 &\le 450 \\ X_1 &\ge 0 \qquad (2) \\ X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Систему ограничений (2) можно представить в виде выпуклого многоугольника

Ограничения по материалу

$5\,X_1 + 20\,X_2 \le 400$ и $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$,

можно представить в виде треугольника рис.1 ;

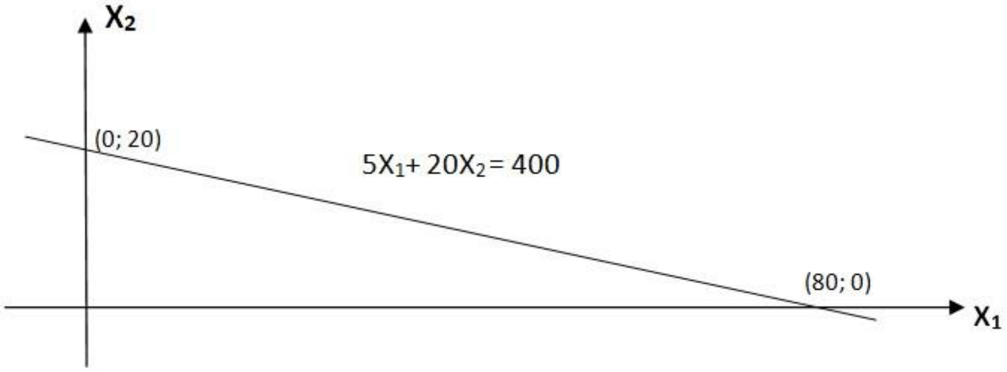
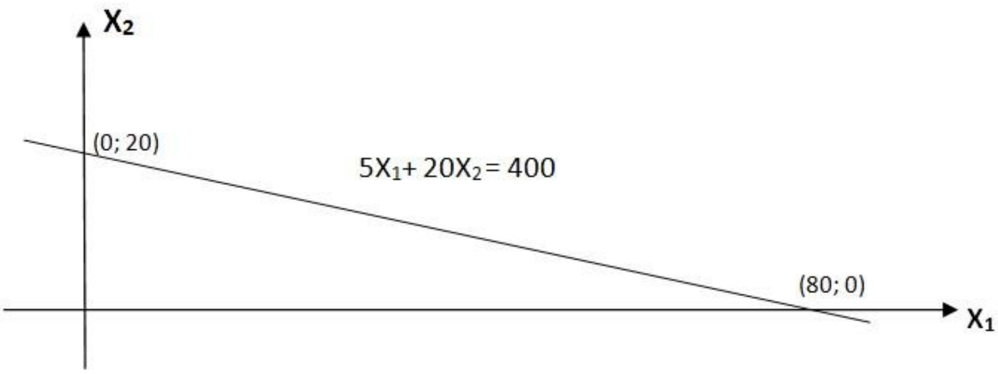
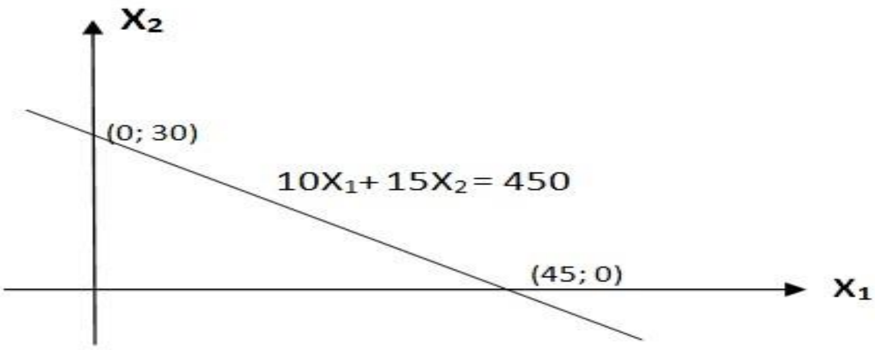


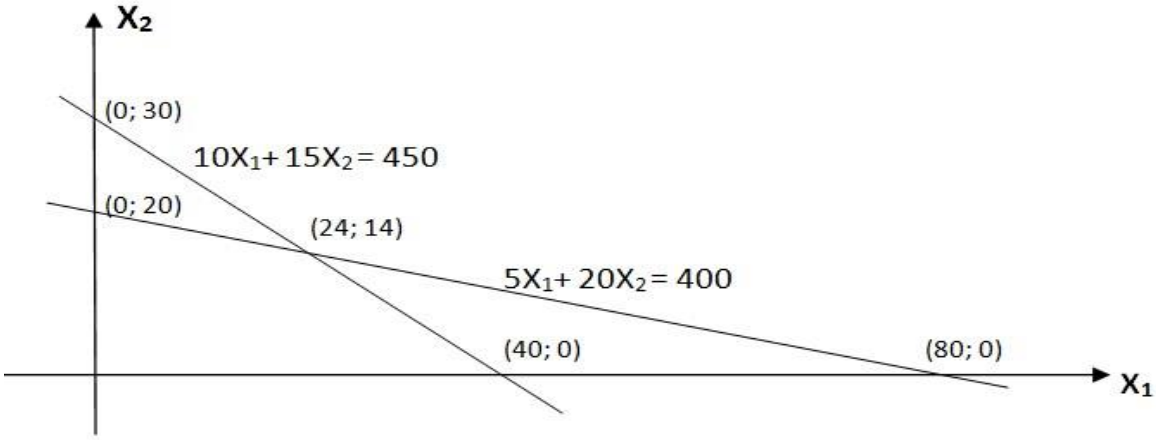
Рис. 1. Ограничения по материалу

Прямая пересекает ось X_1 (П1) в точке (80,0), а ось X_2 – в точке (0, 20). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление продукции П1, то будет изготовлено 80 единиц П1, а если на изготовление продукции П2 – то будет изготовлено 20 единиц П2.





Объединение ограничений рис. 1 и рис. 2 приводит к образованию совместной системы ограничений и формированию области допустимых решений. Графически эта область представляет выпуклый многоугольник с координатами вершин (0;0), (0;20), (24;14), (45;0).



Максимум целевой функции достигается в точке (24,14) и равен 2200 денежных единиц. Таким образом, максимальную прибыль (2200 денежных единиц) предприятие получит при производстве 24 единиц продукции П1 и 14 единиц продукции П2.

Задание 2.

2.1. Цель и содержание задания

Цель задания: приобретение навыков применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования.

Содержание задания.

Для изготовления изделий типа А и В используется сырье трех видов, запасы каждого из которых P_1 , P_2 , P_3 . На производство одного изделия типа А требуется затратить a_1 кг сырья первого вида, a_2 кг сырья второго вида, a_3 кг сырья третьего вида. На одно изделие типа В расходуется соответственно b_1, b_2, b_3 кг сырья каждого вида. Прибыль от реализации единицы изделия А составляет α ден. ед., а изделия В – β ден. ед. Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить задачу симплекс-методом. Дать геометрическую интерпретацию задачи.

<table>
<tr><th rowspan="3">Вар</th><th colspan="4">Изделие типа А</th><th colspan="4">Изделие типа В</th><th colspan="3">Запасы сырья</th></tr>
<tr><th colspan="3">Затраты сырья на 1 изделие</th><th>Цена 1 изделия</th><th colspan="3">Затраты сырья на 1 изделие β</th><th>Цена 1 изделия</th><th rowspan="2">P_1</th><th rowspan="2">P_2</th><th rowspan="2">P_3</th></tr>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>α</th><th>b_1</th><th>b_2</th><th>b_3</th><th>β</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>10</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>900</td><td>702</td><td>540</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td>350</td><td>364</td><td>420</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>220</td><td>140</td><td>260</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>440</td><td>393</td><td>450</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>3</td><td>864</td><td>870</td><td>940</td></tr>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>480</td><td>444</td><td>546</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>8</td><td>8</td><td>428</td><td>672</td><td>672</td></tr>
<tr><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>750</td><td>630</td><td>700</td></tr>
<tr><td>9</td><td>8</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>840</td><td>870</td><td>560</td></tr>
<tr><td>10</td><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td><td>12</td><td>10</td><td>8</td><td>9</td><td>715</td><td>850</td><td>910</td></tr>
</table>

2.2. Методические рекомендации для выполнения задания

Пример. Решить симплекс-методом задачу: для изготовления различных изделий А, В, С предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия А, В и С, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл.1.

Таблица 1

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид сырья</th><th colspan="3">Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие</th><th>Общее количе-ство сырья (кг)</th></tr>
<tr><th>*A*</th><th>*B*</th><th>*C*</th><th></th></tr>
<tr><td>I</td><td>18</td><td>15</td><td>12</td><td>360</td></tr>
<tr><td>II</td><td>6</td><td>4</td><td>8</td><td>192</td></tr>
<tr><td>III</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>180</td></tr>
<tr><td>Цена одного изделия</td><td>9</td><td>10</td><td>16</td><td></td></tr>
</table>

(руб.)				

Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* - через x_2, изделий *C* - через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \quad (1)$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \quad (2)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2 и x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 > 0.$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (1) требуется найти такое, при котором функция (2) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 - это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу I итерации (табл. 2):

Вычисления в 4-ой (m+1)-й строке:

$F_0 = (C, P_0) = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0$;

$z_1 = (C, P_1) = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 = 0$;

$z_2 = (C, P_2) = 0$;

$z_3 = (C, P_3) = 0$;

$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9$;

$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10$;

$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0 - 16 = -16$;

$\Delta_4 = z_4 - c_4 = [0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0] - 0 = 0$

$\Delta_5 = \Delta_6 = 0$

Таблица 2

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	16	0	0	0

Целевая функция равна нулю (ничего не производится, сырье не тратиться – план не оптимальный).

То, что план не оптимальный, видно из четвертой строки: имеются отрицательные числа. Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия А обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 руб. Если включить в план производства по одному изделию В и С, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 руб. Поэтому с экономической точки зрения, наиболее целесообразным является включение в план производства изделий С.

Определим, какой вектор включить в базис:

$$\max\left|\Delta_j\right| = \left|-16\right| \quad \Rightarrow \quad P_3.$$

Вектор P_3 включаем в базис.

Определяем, какой вектор исключить из базиса:

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{b_i}{a_{i3}}\right) \text{ для } a_{i3} > 0.$$

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3}\right) = \min(30; 24; 60) = 24 = \frac{192}{8}.$$

Соответствует P_5. Этот вектор исключаем из базиса.

Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими.

Составляем таблицу II итерации (табл. 3).

Таблица 3.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Заполняем строку вектора P_3: элементы строки получаются из соответствующих элементов предыдущей таблицы 4 делением на разрешающий элемент (на 8).

$$\frac{192}{8}=24;\quad \frac{6}{8}=\frac{3}{4};\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2};\quad \frac{8}{8}=1;\quad \frac{0}{8}=0;\quad \frac{1}{8};\quad \frac{0}{8}=0.$$

Заполняем столбцы для базисных векторов. На пересечении $P_i \times P_i$ ставим единицы, остальные элементы – нули.

Вычисляем следующие элементы в столбцах: (4), (5).

r = 5 (исключенный вектор), k = 3 (включенный вектор)

$$b'_4=b_4-\frac{b_5}{a_{53}}\cdot a_{43}=360-\frac{192}{8}\cdot 12=72,$$

$$b'_6=b_6-\frac{b_5}{a_{53}}\cdot a_{63}=180-\frac{192}{8}\cdot 3=108,$$

$$a'_{41}=a_{41}-\frac{a_{51}}{a_{53}}\cdot a_{43}=18-\frac{6}{8}\cdot 12=9,$$

$$a'_{61}=a_{61}-\frac{a_{51}}{a_{53}}\cdot a_{63}=5-\frac{6}{8}\cdot 3=\frac{11}{4},$$

$$a'_{42}=a_{42}-\frac{a_{52}}{a_{53}}\cdot a_{43}=15-\frac{4}{8}\cdot 12=9,$$

$$a'_{62}=a_{62}-\frac{a_{52}}{a_{53}}\cdot a_{63}=3-\frac{4}{8}\cdot 3=\frac{3}{2},$$

$$a'_{45}=a_{45}-\frac{a_{55}}{a_{53}}\cdot a_{43}=0-\frac{1}{8}\cdot 12=-\frac{3}{2},$$

$$a'_{65}=a_{65}-\frac{a_{55}}{a_{53}}\cdot a_{63}=0-\frac{1}{8}\cdot 3=-\frac{3}{8}.$$

Вычислим элементы в 4-й строке по рекуррентным формулам:

$$F'_0=F_0-\frac{b_r}{a_{rk}}\Delta_k$$

$$F_0' = 0 - \frac{b_5}{a_{53}}\Delta_3 = 0 - \frac{192}{8}(-16) = 384,$$

$$\Delta_j' = \Delta_j - \frac{a_{rj}}{a_{rk}}\Delta_k$$

$$\Delta_1' = -9 - \frac{a_{51}}{a_{53}}\Delta_3 = -9 - \frac{6}{8}(-16) = 3,$$

$$\Delta_2' = -10 - \frac{a_{52}}{a_{53}}\Delta_3 = -10 - \frac{4}{8}(-16) = -2,$$

$$\Delta_5' = 0 - \frac{a_{55}}{a_{53}}\Delta_3 = 0 - \frac{1}{8}(-16) = 2$$

Найденный план не является оптимальным, т.к. в столбце вектора P_2 – отрицательное число: -2 < 0.

$X = (0, 0, 24, 72, 0, 108)$.

Значит, P_2 вводим в базис.

$$\Theta_0 = \min\left(\frac{72}{9}; \frac{24}{1/2}; \frac{108}{3/2}\right) = \min\left(\frac{72}{9}; \frac{24 \cdot 2}{1}; \frac{108 \cdot 2}{3}\right) = \min(8; 48; 72) = 8 = \frac{72}{9} \Rightarrow P_4$$

P_4 – исключаем из базиса.

Составляем таблицу III итерации:

Таблица 4.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	2/3	0

Заполняем элементы 1-й строки (для P_2). Получаем их из элементов 1-й строки таблицы 5 делением на разрешающий элемент: на 9 ($P_2 \times P_4$).

Заполняем остальные строчки: сначала столбцы для P2, P3, P6 (единицы $P_i \times P_i$ и нули)

Остальные ячейки – по рекуррентным формулам:

r = 4 (исключенный вектор), k = 2 (включенный вектор)

$$b_3' = b_3 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{32} = 24 - \frac{72}{9} \cdot \frac{1}{2} = 20,$$

$$b_6' = b_6 - \frac{b_4}{a_{42}} \cdot a_{62} = 108 - \frac{72}{9} \cdot \frac{3}{2} = 96,$$

$$a_{31}' = a_{31} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{32} = \frac{3}{4} - \frac{9}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$a_{61}' = a_{61} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{62} = \frac{11}{4} - \frac{9}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4},$$

$$a'_{34} = a_{34} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{32} = 0 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{18},$$

$$a'_{64} = a_{64} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{62} = 0 - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$a'_{35} = a_{35} - \frac{a_{45}}{a_{42}} \cdot a_{32} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24},$$

$$a'_{65} = a_{65} - \frac{a_{45}}{a_{42}} \cdot a_{62} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Заполняем последнюю строчку.

$$F'_0 = F_0 - \frac{b_4}{a_{42}} \Delta_2 = 384 - \frac{72}{9}(-2) = 400,$$

$$\Delta'_1 = \Delta_1 - \frac{a_{41}}{a_{42}} \Delta_2 = 3 - \frac{9}{9}(-2) = 5,$$

$$\Delta'_4 = \Delta_4 - \frac{a_{44}}{a_{42}} \Delta_2 = 0 - \frac{1}{9}(-2) = \frac{2}{9},$$

$$\Delta'_5 = \Delta_5 - \frac{a_{45}}{a_{42}} \Delta_2 = 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot (-2) = \frac{5}{3}.$$

В четвертой строке таблицы нет отрицательных Δ_j. Значит, найденный опорный план является оптимальным: X = (0, 8, 20, 0, 0, 96).

Следовательно, план выпуска продукции, являющийся оптимальным, включает изготовление 8 изделий В и 20 изделий С.

Затраты на изделие В: 8·15 = 120 кг – I вида сырья,
8·4 = 32 кг – II вида сырья,
8·3 = 24 кг – III вида сырья.

Затраты на изделие С: 20·12 = 240 кг – I вида сырья,
20·8 = 160 кг – II вида сырья,
20·3 = 60 кг – III вида сырья.

Использовано

I вида сырья: 120+240 = 360 кг – использовано полностью,
II вида сырья: 160+32 = 192 кг – использовано полностью,
III вида сырья: 60+24 = 84 кг – осталось 180 – 84 = 96 кг.

Итак, оптимальный план включает изготовление 8 изделий типа В и 20 изделий С. При этом полностью используется сырье первых двух видов и остается не использованным 96 кг сырья третьего вида, а прибыль от производимой продукции составит 400 руб.

Задание 3.

3.1. Цель и содержание задания

Цель задания: научиться решать транспортные задачи.

Содержание задания.

Имеются три пункта поставки однородного груза A1, A2, A3 и пять пунктов потребления этого груза B1, B2, B3, B4, B5 . На пунктах A_i (i = 1, 2, 3) груз находится соответственно в количествах a_1, a_2, a_3 условных единиц. В пункты B_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) требуется доставить соответственно b_j единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_i в B_j определена матрицей $C = \{c_{ij}\}$. Необходимо спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была наименьшей.

$a_1 = 200 + N$, $a_2 = 170 + N$, $a_3 = 180 + N$, $b_1 = 100 + N$, $b_2 = 70 + N$, $b_3 = 180 + N$, $b_4 = 150 + N$, $b_5 = 50 + N$.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Значения a_i, b_j выбрать в соответствии со своим вариантом (номер варианта N – последняя цифра номера зачетной книжки).

3.2. Методические рекомендации для выполнения задания

Транспортная задача в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления A_1, A_2, ..., A_m в n пунктов назначения B_1, B_2, ..., B_n. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Пример. На двух базах $Б_1$ и $Б_2$ находится однородный груз в количестве соответственно: a_1 и a_2 условных единиц. Этот груз необходимо перевести на три предприятия $П_1$, $П_2$ и $П_3$, потребности которых составляют соответственно b_1, b_2 и b_3 условных единиц. Стоимость перевозки одной условной единицы груза с базы $Б_i$ на предприятие $П_j$ составляет c_{ij} руб. Эти стоимости указаны в таблице.

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$Б_1$	3	2	4	840
$Б_2$	2	4	3	600
Потребность предприятий	600	360	480	

Необходимо спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была наименьшей.

Решение. Составим математическую модель задачи. Найдем количество груза, отправленного с каждой базы:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 840 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600 \end{cases}$$

Определим количество груза, доставленное на каждое предприятие:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 600 \\ x_{12} + x_{22} = 360 \\ x_{13} + x_{23} = 480 \end{cases}$$

Общая стоимость перевозок:

$L(x) = (3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13}) + (2x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23})$

$L(x) \to \min$ при (4) ,(5) и $x_{ij} \geq 0$.

Определим тип модели.

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 840 + 600 = 1440$,

$\sum_{j=1}^{3} b_j = 600 + 360 + 480 = 1440$.

$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, задача сбалансированная, модель закрытая.

Найдем первоначальный опорный план методом северно-западного угла.

Сделаем поставку в клетку (1, 1):

x_{11} = min (a_1, b_1) = min (600, 840) = 600. Следовательно, удовлетворяем полностью потребности $П_1$.

Значение 600 вписываем в клетку (1, 1); первый столбец вычеркиваем.

Пересчитываем запас груза на базе $Б_1$, т.е. значение a_1: a_1 - b_1 = 840 – 600 = 240.

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$Б_1$	600 3	2	4	~~840~~ 240
$Б_2$	2	4	3	600
Потребность предприятий	600	360	480	

Сделаем поставку в клетку (1, 2):

x_{12} = min (a_1, b_2) = min (240, 360) = 240. Следовательно, удовлетворяем полностью поставщика $Б_1$.

Значение 240 вписываем в клетку (1, 2); первую строку вычеркиваем.

Пересчитываем потребность $П_2$, т.е. значение b_2: b_2 - a_1 = 360 – 240 = 120.

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$Б_1$	600 3	240 2	4	~~840~~ 240
$Б_2$	2	4	3	600
Потребность предприятий	600	~~360~~ 120	480	

Сделаем поставку в клетку (2, 2):
x_{22} = min (a_2, b_2) = min (600, 120) = 120. Следовательно, удовлетворяем полностью потребность $П_2$.
Значение 120 вписываем в клетку (2, 2); второй столбец вычеркиваем.
Пересчитываем запасы груза на $Б_2$, т.е. значение a_2: $a_2 - b_2 = 600 - 120 = 480$.

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
~~$Б_1$~~	600 3	240 2	4	~~840~~ 240
$Б_2$	2	120 4	3	~~600~~ 480
Потребность предприятий	600	~~360~~ 120	480	

Сделаем поставку в клетку (2, 3):
x_{23} = min (a_2, b_3) = min (480, 480) = 480. Удовлетворяем полностью потребность $П_3$ и запасы на $Б_2$.
Значение 480 вписываем в клетку (2, 3).

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
~~$Б_1$~~	600 3	240 2	4	~~840~~ 240
$Б_2$	2	120 4	480 3	~~600~~ 480
Потребность предприятий	600	~~360~~ 120	480	

План составлен, полностью удовлетворены и поставщики, и потребители.

$$X = \begin{pmatrix} 600 & 240 & 0 \\ 0 & 120 & 480 \end{pmatrix}$$

Занятых клеток 4, и по условию $N = 2+3-1 = 4$. Значит, план опорный.

Клетки, в которых помещаются грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные. Остальным клеткам (незанятым) соответствуют свободные переменные.

Вычислим стоимость перевозки.

$$L(x) = (3\cdot 600 + 2\cdot 240 + 4\cdot 0) + (2\cdot 0 + 4\cdot 120 + 3\cdot 480) = 4200\,.$$

Проверим план па оптимальность.

Найдем потенциалы u_i и v_i из условия $u_i + v_i = c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$: (u_i соответствует строка, v_i - столбец),

$$\left.\begin{array}{l} \text{для } x_{11}\text{: } u_1 + v_1 = 3 \\ \text{для } x_{12}\text{: } u_1 + v_2 = 2 \\ \text{для } x_{22}\text{: } u_2 + v_2 = 4 \\ \text{для } x_{23}\text{: } u_2 + v_3 = 3 \end{array}\right\}$$

Система содержит 4 уравнения и 5 неизвестных, следовательно, система имеет бесконечно много решений. Одну переменную можно выбрать произвольно (потенциал строки или столбца с наибольшим количеством занятых клеток). Пусть $v_2 = 0$.

$u_1 = 2$

$v_1 = 3 - u_1 = 3 - 2 = 1$

$u_2 = 4 - v_2 = 4$

$v_3 = 3 - u_2 = 3 - 4 = -1$

Вычислим оценки свободных клеток:

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 2 + (-1)-4 = -3$

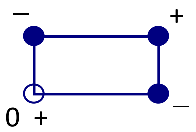
$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4+ 1-2 = 3$

Итак, план не оптимален, т.к. имеются положительные оценки Δij. Наибольшую экономию можно получить по клетке, где наибольшее значение Δ_{ij} из положительных. Клетку (2, 1) необходимо загрузить.

Далее делаем переход к следующему лучшему (не худшему) плану.

Строим означенный цикл:

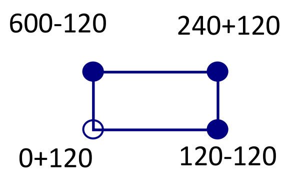
Базы	Предприятия		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$Б_1$	600 3	240 2	4
$Б_2$	2	120 4	480 3

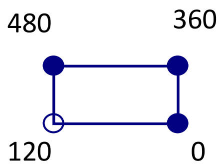


Анализируем клетки со знаком «минус» и выбираем клетку с минимальным объемом перевозок.

$\Theta = \min\{x_{ij}\} = \min(x_{11}, x_{22}) = 120.$

Прибавляем данное число к вершинам с «+», вычитаем из вершин с «-».





Новый план: $X = \begin{pmatrix} 480 & 360 & 0 \\ 120 & 0 & 480 \end{pmatrix}.$

Внесем в таблицу полученные поставки:

Базы	Предприятия			Запасы на базах
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$Б_1$	480 3	360 2	4	840
$Б_2$	120 2	4	480 3	600
Потребность предприятий	600	360	480	

Повторим проверку плана на оптимальность.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_3 = 3 \end{cases}$$

Пусть $v_1 = 0$, тогда

$u_1 = 3$

$u_2 = 2$

$v_2 = 2 - 3 = -1$

$v_3 = 3 - 2 = 1$

Оценки:

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 3 + 1 - 4 = 0$

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 2 - 1 - 4 = -3$

Данный план оптимальный. Теперь вычислим стоимость перевозки:
L($X_{опт}$) = 3 · 480 + 2 · 360 + 4 · 0+2 · 120 + 4 · 0 + 3 · 480 = 3840.

Ответ: $X_{опт} = \begin{pmatrix} 480 & 360 & 0 \\ 120 & 0 & 480 \end{pmatrix}$, L($X_{опт}$) = 3840.

Учебная литература, ресурсы информационно-коммуникационной сети «Интернет» и иные источники, рекомендуемые для выполнения заданий

1. Высшая математика для экономистов [Электронный ресурс]: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/ Н.Ш. Кремер [и др.].– Электрон. текстовые данные.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015.– 481 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/52071.– ЭБС «IPRbooks».
2. Зайцев, М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений [Электронный ресурс]: примеры, задачи, кейсы. Учебное пособие/ Зайцев М.Г., Варюхин С.Е.– Электрон. текстовые данные. – М.: Дело, 2015. – 640 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/51021.– ЭБС «IPRbooks».
3. Математические методы и модели исследования операций [Электронный ресурс]: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 080116 «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям/ В.А. Колемаев [и др.].– Электрон. текстовые

данные.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015.– 592 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/40459.– ЭБС «IPRbooks».

4. Феофанова, Л.Н. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / Л.Н. Феофанова, И.А. Тарасова, О.А. Авдеюк, А.А. Ермакова; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 104 с

Вопросы к зачету

Общие понятия о математическом моделировании экономических систем. Классические модели. Функциональные модели в экономике; условный экстремум. Модели оптимизации при наличии ограничений. Метод множителей Лагранжа. Модель управления запасами. Модели линейного программирования. Модели планирования производства продукции и оптимального использования ресурсов предприятий. Логистические модели. Транспортные задачи с одним и несколькими ресурсами, с маршрутными ограничениями. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Правило построения двойственной задачи. Постановка транспортной задачи как задачи линейного программирования. Закрытая и открытая модель транспортной задачи. Критерий разрешимости. Методы построения опорного плана ТЗ (метод северо-западного угла, метод наименьшего тарифа). Элементы теории оптимального управления.